Schwingungen

Ein Körper der Masse m hängt an einer Feder mit der Federkonstanten D und führt eine ungedämpfte harmonische Schwingung aus.

Allgemeine Lösung der DGL der ungedämpften Schwingung:

$$x(t) = A_1 * \cos(\omega_0 * t) + A_2 * \sin(\omega_0 * t)$$

Auslenkung $x(t)$ bei Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und $v(0) = v_0$:

$x(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$ (da $\sin(0) = 0$ und deswegen das Produkt von $A_1 * \cos(0) = 0$ sein muss)

Nun muss A_2 herausgefunden werden. Da $\dot{x}(0) = v(0) = v_0$ ist, kann darüber A_2 ausgerechnet werden.

$$v(t) = -A_1 * \omega_0 * \sin(\omega_0 * t) + A_2 * \omega_0 * \cos(\omega_0 * t)$$

$$v(0) = -A_1 * \omega_0 * \sin(\omega_0 * 0) + A_2 * \omega_0 * \cos(\omega_0 * 0) = v_0$$

$$v_0 = A_2 * \omega_0 \Rightarrow A_2 = \frac{v_0}{\omega_0}$$

Aus dem Ganzen folgt:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} * \sin(\omega_0 * t) = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{D}{m}}} * \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} * t\right)$$

Auslenkung $x(t)$ bei Anfangsbedingung $x(0) = k$ und $v(0) = 0$:

$x(0) = k \Rightarrow A_1 = k$ (da $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$.)

Nun muss A_2 herausgefunden werden. Da $\dot{x}(0) = v(0) = 0$ ist, kann darüber A_2 ausgerechnet werden.

$$v(t) = -A_1 * \omega_0 * \sin(\omega_0 * t) + A_2 * \omega_0 * \cos(\omega_0 * t)$$

$$v(0) = -k * \omega_0 * \sin(\omega_0 * 0) + A_2 * \omega_0 * \cos(\omega_0 * 0) = 0$$

$$0 = A_2 * \omega_0$$

$0 = A_2 * \omega_0 \Rightarrow A_2 = 0$ (da $\omega_0 \neq 0$, das Produkt jedoch 0 sein muss)

Aus dem Ganzen folgt:

$$x(t) = k * \cos(\omega_0 * t)$$

Der Kondensator (Kapazität C) eines ungedämpften elektrischen Schwingkreises ist auf U_C aufgeladen. Über ein Schalter ist er mit der Induktivität L des Schwingkreises verbunden.

$$\sum U = 0 \qquad U_L - U_C = 0$$

$$U_L = L * \frac{d^2 q(t)}{dt^2}$$

$$U_C = -\frac{1}{C} * q(t)$$

$$L * \ddot{q} + \frac{1}{C} * \dot{q} = 0 \Rightarrow DGL$$

Lösung der DGL: $q(t) = A * \cos(\omega_0 * t)$

Eigenkreisfrequenz des Schwingkreises:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L * C}}$$

Eigenfrequenz des Schwingkreises:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{1}{L * C}}}{2\pi}$$

Amplitude des fließenden Stroms:

$$\hat{\imath} = U_C * C * \omega_0$$

Fließender Strom:

$$i = \hat{\imath} * \sin(\omega_0 * t) = \hat{\imath} * \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)$$

Elektrische Energie im Kondensator:

$$E_{el} = \frac{1}{2} * C * U^2$$

Magnetische Energie in der Spule:

$$E_{mag} = \frac{1}{2} * L * I^2$$

Die Schwingungsamplitude einer gedämpften Schwingung verringert sich nach zwei aufeinanderfolgenden Auslenkungen (einer Periode) um den Faktor x, die Periodendauer betrug T_d.

Amplitudenverhältnis q:

$$e^{\delta * T_d} = \frac{A(t)}{A(t + T_d)} = q$$

Logarithmisches Dekrement:

$$\delta * T_d = \ln(q)$$

Dämpfungskonstante δ:

$$\delta = \frac{\ln(q)}{T_d}$$

Frequenz der gedämpften Schwingung:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} \qquad \omega_d = 2\pi * f_d = 2\pi * \frac{1}{T_d}$$

Frequenz der ungedämpften Schwingung:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_d{}^2 + \delta^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_d}\right)^2 + \delta^2}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Ein Eisenwürfel mit der Kantenlänge l und der Dichte ρ ist an zwei Federn aufgehängt. Die Federkonstante beider Federn zusammen beträgt D, die beiden Seitenflächen gleiten im Abstand d zwischen den Wänden. Die Zwischenräume sind mit einer Flüssigkeit der Viskosität η gefüllt, die Reibungskraft ist $F_R = \frac{\eta * A}{d} * v$.

Reibungsfläche: $A = 2 * l^2$ Masse: $m = \rho * V = \rho * l^3$

Reibungskoeffizient μ:

$$F_R = -\mu * v = \frac{\eta * A}{d} * v$$

Abklingkoeffizient δ:

$$\delta = \frac{\mu}{2 * m}$$

$$\delta = \frac{\eta * 2 * l^2}{d * 2 * \rho * l^3} = \frac{\eta}{d * \rho * l}$$

Schwingungsdauer T_0 der ungedämpften Schwingung:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2}{\sqrt{\frac{D}{m}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{D}{\rho * l^3}}}$$

Schwingungsdauer T_d der gedämpften Schwingung:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{D}{m} - \delta^2}}$$

Logarithmisches Dekrement Λ:

$$\Lambda = \delta * T_d$$

Amplitudenverhältnis:

$$\frac{A(t)}{A(t+T_d)} = \frac{\hat{x}_n}{\hat{x}_{n+1}} = e^{\Lambda}$$

Prozent der maximalen Amplitude nach i Schwingungen:

$$\frac{\hat{x}_n}{\hat{x}_{n+i}} = e^{i*\Lambda}$$

$$\frac{\hat{x}_{n+i}}{\hat{x}_n} = ??\%$$

Erzeugte Wärmeenergie wenn Federn zu Beginn um $\hat{x}_0$ ausgelenkt werden:

$$\Delta E = E_{Pot0} - E_{Pot2}$$

$$E_{Pot} = 0{,}5 * D * Amplitude^2$$

$$\Delta E = 0{,}5 * D * (\hat{x}_0^{\,2} - \hat{x}_2^{\,2})$$

Aperiodischer Grenzfall ($\omega_0 = \delta$) bei Viskosität η:

$$\delta = \frac{\mu}{2 * m} = \frac{\eta}{\rho * l * d}$$

$$\omega_0 = \frac{\eta}{\rho * l * d}$$

$$\Rightarrow \eta = \omega_0 * \rho * l * d$$